– Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique –
Année 2016-2017, Deuxième Année
Macroéconomie 1

Examen final

Durée : 2 heures
Aucun document autorisé - Aucune calculatrice autorisée

Le barème, susceptible d'être modifié, est donné uniquement à titre indicatif.

1 Questions de cours (6 points)

Répondre très brièvement aux questions suivantes, sans utiliser d'équation (une ou deux phrases suffisent pour chaque réponse).

Question 1 Qu'est-ce que la règle d'or de l'accumulation du capital ?

Question 2 Quelles sont les deux principales limites du modèle de Solow-Swan ?

Question 3 Qu'est-ce que la condition d'atomicité d'un marché ?

Question 4 Pourquoi les modèles de croissance exogène, à l'état régulier, ne rendent-ils pas aisément compte du sixième fait stylisé de Kaldor (1961), selon lequel le taux de croissance de la production par tête varie entre les pays ?

Question 5 Pourquoi la modélisation d'un progrès technique volontaire par Romer (1990) nécessite-t-elle l'abandon de l'hypothèse de concurrence pure et parfaite sur certains marchés ?

Question 6 Pourquoi le taux de croissance de la moyenne des consommations individuelles diffère-t-il du taux de croissance de la consommation de chaque individu (commun à tous les individus) dans le modèle à générations imbriquées ?

2 Problème : croissance et ressources non renouvelables (14 points)

Le but de ce problème est d'introduire le concept de ressources non renouvelables dans le modèle de croissance exogène de Cass-Koopmans-Ramsey et d'en étudier les conséquences de nature positive et normative. **On peut répondre à chaque question sans avoir préalablement répondu aux questions qui la précèdent**, simplement en admettant les résultats donnés dans ces questions précédentes.

Le temps est continu, indicé par $t \geq 0$. A chaque intervalle de temps $[t, t+dt]$, où dt est infiniment petit, une quantité agrégée $Y_t dt$ de biens est produite, à l'aide de la technologie suivante :

$$Y_t = F(K_t, R_t, L),$$

où K_t est le stock de capital agrégé à la date t, R_t est le *flux* agrégé de ressources non renouvelables détruites dans la production (de sorte que $R_t dt$ est la quantité agrégée de ressources non renouvelables détruites pour produire $Y_t dt$ dans l'intervalle de temps $[t, t+dt]$), et L est le flux de travail agrégé (supposé constant dans le temps et égal à la taille de la population). Le stock de capital initial est exogène et strictement positif ($K_0 > 0$). La fonction de production F est strictement croissante en chacun de ses arguments. Le bien produit est utilisé pour la consommation et l'investissement. On note C_t le flux de consommation agrégé et δ le taux de dépréciation du capital ($\delta \geq 0$). Le *stock* initial de ressource non renouvelable, noté S_0, est exogène, connu, et strictement positif ($S_0 > 0$).

2.1 Sentiers réalisables et dynamiquement efficients (5 points)

Question 7 On dit qu'un sentier de croissance $(C_t, K_t, R_t)_{t\geq 0}$ issu de (K_0, S_0) est *réalisable* lorsque

$$\forall t \geq 0,\ C_t \geq 0,\ K_t \geq 0,\ R_t \geq 0, \tag{1}$$

$$\forall t \geq 0,\ \dot{K}_t = F(K_t, R_t, L) - C_t - \delta K_t, \tag{2}$$

$$\int_0^{+\infty} R_t dt \leq S_0. \tag{3}$$

Commenter très brièvement les conditions (1), (2), et (3) (une phrase suffit pour chaque condition).

Question 8 On dit qu'un sentier de croissance réalisable $(C_t, K_t, R_t)_{t\geq 0}$ issu de (K_0, S_0) est *dynamiquement efficient* lorsqu'il n'existe pas de sentier de croissance réalisable $(\widetilde{C}_t, \widetilde{K}_t, \widetilde{R}_t)_{t\geq 0}$ issu des mêmes conditions initiales et tel que $\forall t \geq 0$, $\widetilde{C}_t \geq C_t$ et $\exists T \geq 0$, $\widetilde{C}_T > C_T$. Montrer, sans faire de calcul, qu'un sentier de croissance dynamiquement efficient $(C^*_t, K^*_t, R^*_t)_{t\geq 0}$ issu de (K_0, S_0) satisfait l'équation

$$S_0 = \min_{(K_t)_{t>0}, (R_t)_{t\geq 0}} \int_0^{+\infty} R_t dt,$$

où la minimisation se fait pour K_0 et $(C^*_t)_{t\geq 0}$ donnés sous les contraintes

$$\forall t \geq 0,\ K_t \geq 0,\ R_t \geq 0,$$

$$\forall t \geq 0,\ \dot{K}_t = F(K_t, R_t, L) - C^*_t - \delta K_t.$$

Question 9 Résoudre le problème d'optimisation de la question précédente (en notant qu'il rentre dans le cas général vu en cours, avec une variable d'état, une variable de contrôle, et un "taux de préférence pour le présent" égal à zéro) pour obtenir la *condition nécessaire d'efficience dynamique* suivante, appelée "règle d'Hotelling"[1] :

$$\frac{\dot{F_R}(K_t, R_t, L)}{F_R(K_t, R_t, L)} = F_K(K_t, R_t, L) - \delta, \tag{4}$$

1. Cf Hotelling, H., 1931, "The Economics of Exhaustible Resources", *Journal of Political Economy*, 39(2), 137-175.

où F_K (respectivement F_R) représente la dérivée première de F par rapport à K_t (respectivement R_t).

Question 10 Dans cette question, on considère une version décentralisée de cette économie dans laquelle (i) les ménages détiennent le capital et les ressources non renouvelables, et (ii) tous les marchés sont en concurrence pure et parfaite. Interpréter $F_K(K_t, R_t, L)$ et $F_R(K_t, R_t, L)$ comme des prix et la règle d'Hotelling (4) comme une condition d'indifférence entre deux types d'actifs. Quelle conséquence cette règle a-t-elle sur l'évolution du prix des ressources non renouvelables au cours du temps ?

2.2 Planificateur avec une préférence pour le présent (5,5 points)

Dans cette section, on normalise L à 1 ; on néglige la dépréciation du capital : $\delta = 0$; et on considère une fonction de production de type Cobb-Douglas : $F(K_t, R_t, L) \equiv K_t^\alpha R_t^\beta$, avec $0 < \beta < \alpha < 1$. On s'intéresse à un planificateur maximisant l'utilité intertemporelle à la date 0 suivante :

$$U_0 \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt,$$

où ρ est le taux de préférence pour le présent ($\rho > 0$) et θ l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle ($\theta > 0$ et $\theta \neq 1$).

Question 11 Montrer, sans faire de calcul, que le sentier choisi par ce planificateur est dynamiquement efficient (deux ou trois phrases suffisent).

Question 12 Ecrire le problème d'optimisation *auxiliaire* de ce planificateur consistant à choisir $(K_t, C_t)_{t \geq 0}$ pour $(R_t)_{t \geq 0}$ donné. En résolvant ce problème auxiliaire, montrer que le sentier $(K_t, C_t, R_t)_{t \geq 0}$ choisi par le planificateur satisfait l'équation d'Euler suivante :

$$\frac{\dot{C_t}}{C_t} = \frac{\alpha K_t^{\alpha-1} R_t^\beta - \rho}{\theta}.$$

Question 13 Dans cette question, on suppose que $\alpha + \beta = 1$. Déduire des questions précédentes que le sentier choisi par le planificateur est tel que $\dot{x_t} = x_t^\alpha$, où $x_t \equiv \frac{K_t}{R_t}$, puis qu'il est tel que $\lim_{t \to +\infty} C_t = 0$. Cette situation vous semble-t-elle juste à l'égard des générations futures ?

Question 14 Dans cette question, on considère une version décentralisée de cette économie dans laquelle (i) l'utilité intertemporelle de chaque ménage m à la date 0 est

$$U_{m,0} \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{c_{m,t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt,$$

où $c_{m,t}$ est la consommation du ménage m à la date t, (ii) les ménages détiennent le capital et les ressources non renouvelables, et (iii) tous les marchés sont en concurrence pure et parfaite. Sans faire de calcul, déterminer si l'équilibre concurrentiel obtenu est socialement optimal. S'il ne l'est pas, quel type de politique économique pourrait, selon vous, être optimal ?

Question 15 Même question que la précédente, dans le cas où l'utilité intertemporelle de chaque ménage m à la date 0 est

$$U_{m,0} \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[\frac{c_{m,t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} - G\left(S_t\right) \right] dt,$$

où S_t est le stock agrégé de ressource non renouvelable restant à la date t et G est une fonction strictement décroissante représentant le coût, en termes d'utilité, du changement climatique dû à l'exploitation des ressources non renouvelables.

2.3 Planificateur sans préférence pour le présent (3,5 points)

Dans cette section, on reste dans le cas où $L = 1$, $\delta = 0$, et $F(K_t, R_t, L) \equiv K_t^\alpha R_t^\beta$ avec $0 < \beta < \alpha < 1$, mais (compte tenu du résultat obtenu à la question 13) on s'intéresse maintenant à un planificateur "rawlsien"[2] imposant l'équité intergénérationnelle, c'est-à-dire choisissant un niveau de consommation agrégé, noté C, à la fois constant dans le temps et maximal.

Question 16 Montrer, sans faire de calcul, que le sentier choisi par le planificateur rawlsien est dynamiquement efficient (trois ou quatre phrases suffisent).

Question 17 On admet que K_t est linéaire en t le long du sentier choisi par le planificateur rawlsien. Vérifier alors, en utilisant les résultats de la section 2.1 et sans écrire ni résoudre aucun problème d'optimisation, que ce sentier est le suivant :

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t, \\ R_t &= \left(\frac{C}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t \right)^{\frac{-\alpha}{\beta}}, \\ C &= (1-\beta) \left[(\alpha - \beta) S_0 \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} K_0^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Commenter très brièvement.

Question 18 Vérifier que le sentier donné à la question précédente satisfait la condition suivante, appelée "règle de Hartwick"[3] :

$$\dot{K}_t = F_R(K_t, R_t, L) R_t.$$

Selon cette règle, comment doit être utilisée la rente tirée de l'exploitation des ressources non renouvelables pour assurer aux générations futures une consommation égale à celle des générations présentes ?

2. Cf Rawls, J., 1971, "A Theory of Justice", Cambridge, Massachusetts : Belknap Press of Harvard University Press.

3. Cf Hartwick, J., 1977, "Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources", *American Economic Review*, 67(5), 972-974.